

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59

X - 15 JULI 1959

INHOUD

Prof. Dr. H. Freudenthal, Report on a comparative study of methods of initiation into geometry	289
Dr. G. Bosteels, Keuze en motivering van de oefeningen, vraagstukken en toepassingen	307
Mathematisch centrum	314
D. Leujes, De wandversiering van een wiskundelokaal	315
C. W. Dornseiffen, Beweging in een verticale cirkel .	316
Boekbespreking	317
Recreatie	319, 306
Kalender	320

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezaand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

REPORT ON A COMPARATIVE STUDY OF METHODS OF INITIATION INTO GEOMETRY

Submitted on behalf of the International Commission on
Mathematical Instruction (ICMI)
at the International Congress of Mathematicians at Edinburgh, 1958

by

Prof. dr. H. FREUDENTHAL

1. At its Geneva meeting on July 2, 1955, the Executive Committee of the ICMI adopted a working plan consisting of three subjects to be studied by the national subcommittees and to be discussed at the Edinburgh congress. This working plan was communicated to the national committees by circular letters in August 1955, and again in January 1956, and in August 1957. On the strength of our experience in the Netherlands I venture to claim that a working period of three years is imperative for projects like those we adopted at Geneva three years ago. I have got the impression that in some countries the persons or committees that had to report on the third subject, have not been designated before the end of 1957. In one case they were informed as late as March 1958 of the fact that they were expected to report on that subject. It is to be regretted that apparently the national committees did not sufficiently appreciate the difficulty of the task to be fulfilled. Most of the national reporters have suffered from a serious lack of time which could easily have been avoided. The above explains and justifies the national reporters who finally gave excellent reports though the time available was too short for a more detailed exposition.

National reports on the third theme of the ICMI have been submitted to the general reporter by ten countries: Belgium, Canada, Finland, Germany (Federal Republic), Italy, Japan, the Netherlands, Poland, U.S.A., and Yugoslavia.¹⁾ Most of these reports cover a few pages only. The German, the Polish and the Yugoslavian report are of the order of magnitude of one printed sheet. The

¹⁾ It is a pity that owing to personal circumstances no report on the present subject has been delivered by the Committee of the United Kingdom. I could, however, draw some information from two reports of the Mathematical Association of 1922 (ed. of 1956) and of 1937 (ed. of 1957) on "The Teaching of Geometry in Schools".

report of the Netherlands Subcommittee has been printed; it contains 120 pages. Of course it should not be concluded from these data that Dutch educators can tell more about teaching geometry than those of other countries. Our whole secret is that we started our work as early as 1955 and that we were able to take advantage of the whole three years period.

2. As a project of international educational collaboration the third subject of the ICMI is rather unusual. From the beginning of this century programs of mathematical instruction have often been discussed on the international level. In 1955 at the Geneva meeting a few of us strongly advocated the need of an international exchange of experiences in the field of teaching methods. On the strength of their arguments the third subject has been adopted. Nevertheless the title of the subject seems to have been liable to misinterpretations. Some reporters gave an account of *programs* of geometrical instruction. If possible in the time still available these reports have been replaced by accounts on teaching methods as desired by the ICMI. I hope that in the new four years period the cooperation will be better so that reporters will know what they are expected to do. It would be wise to add detailed instructions to the new themes.

You may have the impression that I am somewhat disappointed. In a certain sense this is true. All national reports, even the shortest of them, contain so many extremely valuable details that I infinitely regret that they have not been much longer. I have been convinced that educators of the whole world can learn a good many things from the experiences of their colleagues. This conviction has been confirmed by the reports I have studied when preparing this general report. I hope all national reports will be printed and made accessible to a broader public. It will be a good thing to proceed on this way. In all sciences we take advantage of worldwide experiences. The exchange of teaching experiences should not be hampered by political or linguistic frontiers.

3. Comparative studies in education have to account for a large diversity of educational systems which is caused and maintained by different opinions, in the past and nowadays, about the social task of the school. This might be illustrated by one, particularly striking example: Nearly the same kind of geometry (mainly mensuration) is taught in Canada to 15 or 16 year olds ¹⁾ and in Germany and

¹⁾ This statement was based on a geometry course for 15—16 olds that was added to the Canadian report. The Canadian reporters inform me that this course does not reflect geometrical instruction in Canada. Deductive geometry starts with the 14—15 age group.

Poland to 10 or 11 year olds. This is not a reason for one part to boast and for the other to feel inferior. In European countries children are given a widely diverging amount of intellectual education according to the school they attend. In Western-Europe the percentage of youths who are educated on the highest intellectual level, though ever increasing, is still very small; in the countries of Eastern Europe it is much higher. In U.S.A., Canada and Japan, and in some other extra-European countries education is more uniform. Intellectual people in Western Europe will usually be proud of the level of their education which is also that of their children. So they are exposed to the danger of disregarding all attempts of giving a broader part of the youth an education that is not equivalent to the highest level of European education. When European people speak of mathematical education, they will often be inclined to attach the highest importance to that kind of schools which prepare for scientific education. The majority of youths will not draw the educational attention they deserve. So the large part played by prescientific education in the European reports is not surprising. Nevertheless I am convinced that the aims of teaching geometry, as seen by educators all over the world, are essentially the same. All educators will admit that in our world operational and creative skill is more valuable than a stock of permanent knowledge. They will prefer teaching children the principles of comparing areas to telling them Pythagoras' theorem. They will judge it more important that children can find the area of a circle by rational means than that they know by heart that π equals $3\frac{1}{7}$. From Greek times onwards geometry has proven its value not as a sum of disconnected experiences, but as a deductive system of knowledge, and teachers will try to develop the sense of scientific geometry as much as possible in the minds of their pupils. They will not give the same answer to the question why children should be taught deductive geometry, but all will be convinced of its educative value. Probably they will differ as to the age t_0 at which deductive geometry can and should be taught, and on the initial conditions of training which must be fulfilled, in order that teaching deductive geometry might be fruitful.

4. I have the impression that in the U.S.A. teaching practice the point t_0 is fixed at the age of fifteen (10th grade). Japanese education seems to share this opinion, though our Japanese reporter advocates an earlier introduction of deductive methods. In Canada the point t_0 seems to lie still higher. The Canadian report contains a mensuration course for 15 or 16 year olds, as an introduction to deductive geometry. Among the European countries Italy fixes t_0 as

late as the age of fourteen, but the reporter remarks that during the preparatory period, which precedes this point, the pupil is gradually led or should be led to adopting the deductive method.

In most European countries the traditional t_0 is the age of twelve (7th grade), but I doubt whether this tradition is as old as people usually think, for not until the end of the past century did mathematics become an important teaching subject. European educators will be inclined to divide youth in two groups, the one for which $t_0 = 15$ is much too high, and the other for which no t_0 exists, i.e. which never reaches the maturity for deductive geometry. They will refuse to delay deductive geometry in behalf of the second group. On the other hand educators who are inclined to question traditional opinions, will often decide that twelve years is too early for teaching deductive geometry.

5. It is much more important to know which initial conditions of training must be fulfilled at the time point t_0 .

For many years the answer to this question has been very simple in European educational practice. Geometry is a rational science, so it can be taught to children as soon as they have matured into rational beings. Definitions, axioms, theorems, proofs were engraved into the mental tabula rasa of children who did not grasp the meaning and the aim of the deductive method. Euclidean rigour has been the principle of teaching geometry right from the beginning, but neither the authors of textbooks nor the teachers realized that the hotchpotch of definitions, axioms, theorems and proofs they dealt with in the first chapters of geometry did not at all match the exalted ideal of mathematical rigour. The results have been disappointing, but there are still many teachers who oppose against new methods. In Belgium the traditional philosophy of initiating into geometry has officially been abjured. The greater part of teachers have adopted a new point of view.

In the Netherlands the most progressive teachers have succeeded in convincing the government of the need of new teaching methods. The reader of the Netherlands report will notice that the struggle against the traditional system is still far from finished in our country. The adoption of new methods will be a rather slow process, in which new textbooks will play a decisive part. In our country the government has not the right to prescribe or to interdict textbooks.

In Belgium and in the Netherlands the system of confronting the pupil in the first grade of secondary schools with Euclid has been particularly mistaken, because in these countries no geometry whatsoever is taught on the primary schools (apart from computations of

areas of rectangles and of volumes of rectangular parallelepipeds). In Germany there is a long tradition of "Raumlehre", preparatory geometry in the 5th and 6th grade, but it seems that this subject seriously suffers from the indifference of teachers who maintain that there is no time available for "Raumlehre" and from the opposition of those who object against any kind of preparatory mathematics. England knows a very short period of preparatory geometry. In Italy three years of preparatory geometry precede the deductive geometry course, but nevertheless the reporter complains that the 14 year olds are struggling with the same difficulties to understand the notions of the deductive system as the 12 year olds in Belgium and Holland. There exists a preparatory course, but the teacher of the deductive course refuses to derive advantage from its results. (From this experience we can learn that the value of a preparatory course does not consist in its existence, but in the fact that its results will be used and can be used as initial conditions for a higher course. We shall come back to this important point.) The same complaint about discontinuities between the different levels of geometrical instruction is also heard in the Yugoslavian report, though it is not clear from it at which are the pupil will pass from the preparatory to the deductive course. A high degree of continuity is met with in the Polish system; in the 6th and 7th grade geometrical instruction develops gradually from a preparatory into a deductive course. U.S.A. and Japan know a long lasting preparatory course covering the 7th, 8th and 9th year. I am not sure, however, whether this course is really preparatory. A small minority of youth continue with deductive geometry in the 10th grade. So it is probable that the geometrical instruction in the preceding grades is not directed to the goal of creating favourable initial conditions for teaching deductive geometry. Canada knows a mensuration course in the 10th or 11th grade in which a few preparatory elements can be met with.¹⁾

6. All modern educators agree that geometrical instruction cannot start with an exposition of the deductive system. Teaching deductive geometry may be the first intermediate aim of geometrical instruction, but then it must be prepared in a introductory course. As to the length, the depth and the material contents of this course there is a large diversity of opinions. In the course sketched by some contributors to the Netherlands report the deductive level is reached in a few months, in the more individual system of other Dutch con-

¹⁾ See the note to p. 290.

tributors the duration of the introductory period will depend on the ability of the pupil, but I am sure they will set two years as a limit — after two years it will appear whether a child can switch over to the deductive course. The longest introductory course, of three years, is met with in the U.S.A. and in the Japanese system.

All educators agree that one of the initial conditions to be fulfilled at the time t_0 is a conscious acquaintance with the intuitive properties of concrete space and of the figures in it. Yet the actual interpretations of this demand cover a wide range. Some contributors to the Netherlands report deny the need of special measures. They posit that the stock of incidental spatial experiences of a twelve years old is broad enough as a basis for geometry. Obviously they identify geometry with plane geometry, but even under this restriction other teachers will deny the sufficiency of the incidental experiences of the twelve year olds. They will point out that often children and even grown-up people who have learnt mathematics, do not know what are congruent and similar figures other than triangles, and that they cannot discern central and axial symmetries in plane figures, but the first group of teachers will not yield to this argument, because in a more or less classical course of geometry symmetries or other geometrical transformations and general congruency and similarity do not play any essential part. So the desirable extent of intuitive properties of concrete space known to the pupil at t_0 will depend on the pattern of deductive geometry the teacher has in view.

The question whether the pupil should be acquainted with three-dimensional space as a substrate for solid geometry at a very early stage is crucial. It will not arise if the teacher is inclined to switch over from preparatory geometry to a classical pattern of deductive geometry as soon as possible. Therefore some of the Dutch contributors do not mention solid geometry at all. On the other hand in three contributions to the Dutch report solid geometry plays an even more important part than plane geometry. Acquaintance with space is the leading idea of the introductory courses of Mrs. Ehrenfest and of Van Albada. The latter goes as far as to deal with perspective, shadow constructions, and descriptive geometry besides solids and making models. Mrs. and Mr. van Hiele pay more attention to preparing the deductive structure, but nevertheless two thirds of the time available in the first year is devoted to solid geometry. Modern Belgian methods lay strong stress on solid geometry, particularly on making models. Sections of solid bodies are used as the most natural means of introducing plane figures and their rela-

tions (congruency and similarity). German educators often plead for the need of a "fusion" of plane and solid geometry, but it is doubtful to which degree this fusion has been realized. The Italian reporter does not mention solid geometry. Also in the consulted English report little attention is paid to it. The Polish reporter says to hesitate with regard to solid geometry, he raises objections, but nevertheless solid geometry occupies a rather important place in his preparatory geometry. The importance of solid geometry is also stressed in the Yugoslavian report. Solid geometry comes rather late in the U.S.A. preparatory programs; it seems to occupy a place of minor importance. The same seems to be true in the Japanese systems. No solid geometry is mentioned in the Canadian report.

The problem of solid geometry should be seriously reconsidered by all those who are interested in teaching geometry. Some teachers hold that early acquaintance with solid geometry is the best preventive against the usual difficulties experienced by many children when deductive solid geometry starts. They are afraid of exclusive plane geometry killing spatial imagination.

7. Acquaintance with manual techniques will improve acquaintance with space, but it has also merits of its own, and it may also be considered as one of the initial conditions to be fulfilled at t_0 . Some Dutch contributors pay little attention to these techniques. Others stress their importance, but they do not go further than teaching the technique of the usual instruments (ruler, compasses, and so on) and of drawing and constructing. Three contributors teach a variety of techniques, such as cutting, matching, making models, paperfolding, measuring, and so on. The same or even more stress is laid on manual techniques, particularly on making geometrical and mechanical models in the aforesaid Belgian school. A strong collaboration between the teachers of mathematics and of handicraft is characteristic of Belgian instruction. It is not surprising that in Germany, which is the cradle of the "Arbeitsunterricht", much attention is paid to teaching a variety of geometrical techniques. In Poland and Yugoslavia they occupy an important place in the program, though in Poland drawing techniques prevail. In Italy, England and Canada the techniques to be taught are mainly restricted to drawing and constructing. In U.S.A. and Japan we meet again with a rich variety of techniques to be taught; in U.S.A. handicraft and mathematics are strongly related.

8. The question may be raised to what degree applied geometry must be incorporated into a propaedeutic course. If I say "appliéd

geometry", I do not mean a series of computations of volumes, in which the words rectangle and parallelepiped are replaced by "garden" and "swimming pool", or a series of exercises on triangles which are supposed to contain towers or to cross rivers. I shall speak of applied geometry, if real problems are to be solved by geometrical means. Real problems can considerably improve the conditions of transfer of training. They can also be a powerful means of motivation. It is, however, not easy to find real problems, that is to say problems which, in a given classroom situation, ask for a solution. The project method is an excellent idea, but I never found reports on projects in which geometry was integrated strongly enough and at the same time on a sufficiently high level. In one Dutch system of lower technical education (cp. a contribution by Kroos-hof in our report) in each phase of the instruction all subjects are centred around one piece of handicraft made by the pupil. But the relation between the piece of work and the mathematical subject is often too loose or too artificial.

The need of stronger relations between mathematics and the other teaching subjects is vividly felt by some reporters, especially by the Yugoslavians. Valuable proposals are found in the famous "Übungenbuch" by Mrs. Ehrenfest-Afanassjewa and in different reports, e.g. in van Albada's contribution to the Dutch report, and in the U.S.A. and Japanese report. Outdoor activities can be stimulating. Handicraft can be a rich source of real geometrical problems. This is perhaps less true in the Belgian system, where handicraft is closely knitted with mathematics and making models prevails, than in U.S.A., where handicraft is selfconsistent. In the U.S.A. report an instruction paper for making a school transit was included. Such a piece of work, if directed by a good teacher, can be a rich source of applied mathematics. (Note that this might be less true in the European system, where children in the preparatory phase are too young to make pieces of handicraft like that mentioned above.)

9. We have already pointed out the influence which a prospective deductive course can have on the preceding introductory course. The teacher will be reluctant to adopt a preparatory theory of parallels based on the existence of rectangles or of similarity as long as he believes that the Euclid-Hilbert definition of parallels as non-intersecting lines and the Euclid-Hilbert form of the axiom of parallel lines is the only possible one in a deductive course at school. It has been one of the merits of K. Fladt to point out that the Euclid-Hilbert approach is less suitable for initiation into geometry. Never-

theless I have the impression that this approach still prevails in mathematical instruction.

Another example is the use of geometrical transformations, first advocated by F. Klein as a consequence of his so-called "Erlanger Programm",¹⁾ but still far from generally adopted, even in Germany, it seems. In the higher forms of some Belgian schools geometrical transformations, illustrated by a rich variety of mobile models, is a substantial part of the subject matter, more substantial than in any other country, as far as I know. But it is quite another thing to teach transformations or to make them the fundamentals of geometry. In the initiating phase the Polish program shows the strongest influence of the "Erlanger Programm". The Polish experiences are diametrically opposed to those expounded by the German reporter. I shall come back to this point.

How to explain this failure of "Erlanger Programm" in school geometry? One of the causes is the — badly understood — authority of Hilbert's "Grundlagen der Geometrie", which can be said to have lengthened the life of Euclid's methods for half a century. There is still another point. "Erlanger Programm" has been used as a slogan, but the problem of transformation geometry in mathematical instruction has not seriously enough been faced. There are textbooks in which transformations are taught, but the basis is always classical. There does not exist any systematic course of school geometry based on the transformation idea. Even the problem of how to introduce and how to teach transformations, has not received due attention. It is perhaps worthwhile to expound the cardinal problem of teaching geometrical transformations. There is a danger that a child understands that transformation is: picking up a figure and laying it down elsewhere — without changing its shape or after having applied some similarity or affinity. Of course this is a serious misapprehension. Free mobility of figures is much less than geometrical transformation. Geometrical transformation means that the whole plane (or the whole space) is picked up and put down elsewhere. Free mobility of figures is a much more intuitive notion than geometrical transformation. The less intuitive notion is very likely blocked by the more intuitive one, especially if moving models are used, as it is done in many Belgian schools. This is not a mere hypothesis of mine, but a real danger. I have seen textbooks, in which that fundamental mistake has been made by the author him-

¹⁾ The teaching problem of "Erlanger Programm" is quite differently viewed by Professor Servais. It is not possible to incorporate his profound remarks in this report.

self and it is continuously made in Piaget's work. Of course one cannot arrive at a consistent notion of transformation groups, if one starts from „mobility of figures" instead of "geometrical transformation".

This is the fundamental problem of teaching geometrical transformation: how to fight against "free mobility".¹⁾ I have found too few indications in the literature that this difficulty has clearly been realized. So I can very well understand the sceptical attitude towards transformations and „Erlanger Programm" as a subject matter and as a basis of geometrical instruction.

Nevertheless I think there is some hope left. There is one non-trivial geometrical transformation that is immediately seen as a transformation of the whole plane, not as the movement of a figure in the plane. That transformation is axial symmetry. Central symmetry and rotation are much more difficult; translations are the most difficult case. If the teacher starts with symmetry and if rotations and translations are introduced as products of symmetries, there is a real chance, I believe, that the child will grasp the notion of transformation, even in the initiating phase.

This is exactly what happens in propaedeutic geometry according to the Polish report: starting with symmetries and dealing with rotations and translation as generated by symmetries (6th grade). The lengthy digression on mobility, transformations, and "Erlanger Programm" you have listened to, was meant as a plea for the Polish view. The Polish argumentation is different. Too much stress is laid on the idea of mobility of figures, and symmetry is preferred to other transformations because it does not depend on the notion of parallel lines and because symmetries produce the whole group of plane movements. In my opinion this argument is less decisive. I believe that symmetry is the didactic key of transformation geometry, because it exhibits a transformation of the whole plane.

I have mentioned that the point of view of the German reporter is diametrically opposed to that of the Polish report. The German reporter has carefully analyzed the situation of teaching symmetry. He has indicated some difficulty and a way out of it, which I cannot explain in a small compass. In any case he prefers starting with translations. In view of our former exposition it is extremely instructive how he proposes to introduce translations (5th grade): by

¹⁾ This does not mean that "free mobility of figures" is bad as a teaching subject. I only assert that in an instruction system based on "Erlanger Programm" we shall have to fight against it. But I do not claim that geometrical instruction must be based on "Erlanger Programm".

means of the square lattice (squared paper seems to be a rather popular device in German geometrical instruction). I share this view. I believe that the only way of early introducing translations is using the square lattice. Yet not because the pupil is familiar with it, but because it is the most (perhaps the only) natural *infinite* figure. Free mobility of the square lattice can suggest translation or rotation over the whole plane. So it might be a device that prevents the wrong reduction of "geometrical transformation" to "free mobility" of a single figure. Nevertheless I think that there are some other reasons for preferring symmetry to translation as a starting point.

Symmetries is more interesting than translations and rotations. To a young child congruent figures are the same. It will not hit upon the idea that something has happened if a figure is carried to another place. To an unsophisticated mind movement is not a transformation. In this regard rotation is somewhat better than translation. If a cube is translated, nothing has happened; if it is turned and put upon an edge or a corner, something has been changed. But mirror reflection gives the strongest feeling of an important event. Symmetry as a transformation is more attractive, more abundant, and more problematic than translation and rotation. So one can understand why it appears in nearly all reports, and why its usefulness as a teaching subject is often stressed. Symmetry has even been integrated in some rather classical systems as exposed in contributions to the Dutch report. There is already a rich abundance of examples how to teach symmetry and how to use it. Nevertheless this theme is far from exhausted. In more recent literature one is often struck by the many new versions. In the Dutch report symmetry plays an important part in the contributions of van Albada and of the van Hiele's. In the first case stress is laid on acquaintance with space, in the second case it is subordinated to the general aim of preparing deductive geometry. As mentioned above in the Polish report symmetry is even the base of congruency. It should be added that in the Polish system homothety is the other pillar on which transformation geometry rests.

10. I shall deal with two major subjects proposed for initiating into geometry: "square lattices" and "paving a floor with congruent tiles". Square lattices have drawn the special attention of German teachers. (Cp. a paper of M. Enders in "Der Mathematikunterricht 1955, 29—76.") Areas, parallelograms, proportions, similarity and other transformations, and coordinates are taught while using systematically squared paper. No doubt the square lattice, if used with not too many pretensions, will be a valuable

device. Compared to symmetry it is too poor to derive a substantial part of introductory geometry from it. In any case it is too rigid. The plane is analyzed here, and structured by means of a fixed system of horizontal and vertical lines. Such a procedure is artificial. It does not match the attitude of synthetic geometry. It can lead the pupils the wrong way. Getting rid of this rigid substrate of the plane can become a difficult task.

Gattegno's geoplan is much better. This is a square lattice of nails on a wooden plate without joining lines drawn. On this plate figures are constructed with elastic strings. This is a more flexible and quicker method.

Paving is mentioned in the Dutch report only, though as a topic of instruction it has a rather long history. It was used by E. Borel in his booklets, and a few Belgian teachers have studied it. In the Dutch report it is one of the chapters of Van Albada's method. It has thoroughly been explored by Mrs. van Hiele. A detailed report on an experiment of teaching this subject during one trimester is to be found in her thesis. The children are given bags containing different kind of congruent cardboard polygons. They have to cover a portion of the plane with them and to copy these patterns by drawing. Parallelism, sum of the angles of a polygon, similarities, congruencies and some transformations arise in a quite natural way from working in this field. The paving patterns show a rich variety of relations. The children themselves ask why some relations hold and other relations do not hold, and they discover the logical linking of geometrical relations.

11. From teaching subjects we shall now pass to teaching methods. There is a general agreement that the first phase of teaching geometry must be concrete and intuitive. The abstract approach has unanimously been condemned. Yet the interpretations of what is concrete and intuitive, differ widely. The demand for concreteness combined with modern psychological ideas would suggest starting with global structures which should be gradually differentiated and refined, and not the inverse way, which is classical, of starting with the elements in order to build up gradually the global structures. Nevertheless the classical start "point, line, surface, body" is not yet out of use. An old-fashioned subject such as the generation of a line by a moving point, of a surface by a moving line, and so on, is even recommended in the otherwise rather progressive official Belgian programme.¹⁾ Often concreteness and intuitiveness are treated as

¹⁾ Professor Servais informs me that the programme does not recommend verbalizing the dynamical generation of geometrical entities, but rather an active dynamical approach that matches the psychological dynamism of the child.

synonymous with handling ruler and compasses, e.g. in the official Italian program. Others are of opinion that drawing is too narrow a base for intuitive geometry, and that it is too closely related to a rather abstract and sophisticated image of perception space. They use solid and mechanical models, global patterns like pavements, outdoor observations and so on. Still others argue that showing models is not enough. Not only the used material, but also the relation of the pupil to the material must be concrete in the sense that as long as concrete material is used it should be handled by the pupils themselves. This is said in various ways in the Belgian, German, Polish and Yugoslavian reports. From the Netherlands report van Hiele's intention "to give the pupil concrete material that he can handle" may be cited. In the opinion of the U.S.A. and Japanese reporters this is more or less self-evident attitude. Card-board, scissors, glue, adhesive tape, plexiglass, Meccano pieces, knitting needles have become or will become as powerful means of concrete geometrical expression as rulers and compasses have been in the past. Active learning is met with criticism by the Italian reporter, but it is evident that the caricature of active learning he paints does not aim at more serious procedures.

I would like to add a few words about the so-called experimental method in preparatory geometry. As long as experimenting simply means trying, there is no need for further observations. Sometimes, however, experimentation in geometry is understood in the sense as it is taken in the properly experimental sciences. In the Dutch report, Mrs. Ehrenfest and the van Hieles, though advocating a concrete approach, turn against this interpretation. Measuring the perimeter of a circle or the volume of a pyramid or the sum of angles of triangles might serve to illustrate the notions of perimeter of a figure, volume of a body, sum of angles of a polygon. But if the problem is faced, how to approximate π , how to find the formula for the volume of a pyramid, how to make sure that the angles of a triangle are 180° together, the teaching value of this method is small or even negative. It is just the aim of the preparatory course to block this kind of approach.

From Mrs. van Hiele's experiment it appears that the child itself tends rather early not to rely upon the method of experimental science. When paving a "floor" with one kind of figures, it will finish the manual activity of fitting the pieces as soon as it has grasped the general pattern of the floor. It is natural for him to disregard bad fittings caused by incongruencies of the used material. If this stage is reached, it would be unwise to have the child fall back on more primitive methods.

12. There is a general agreement that children can learn the names of geometrical objects and of relations in the preparatory phase. Teaching names can be purely ostensive or more or less explanatory. (This is a rectangle — or — a rectangle is . . .) If the approach is concrete enough, the child will learn the names of even complicated geometrical objects and relations (regular polygon, similarity) in the same way as it has formerly learnt the names of persons, animals, things, activities, and so on. In a less concrete approach the teacher will explain the meaning of names. The first method has the advantage that after having grasped the meaning of some word, the children can try to find verbal explanations of their own. Examples for this procedure are to be found in the mentioned thesis of Mrs. van Hiele. There is a rather general agreement that suchlike explanations should not be learnt by heart. The teacher can check in a concrete situation whether a child knows the meaning of a name. Yet without doubt it is one of the goals of propaedeutic geometry that children can explain the words they are using, not by showing the related objects, but by verbalizing their properties. Some teachers go even further in the initiating phase: they are teaching and asking formal definitions, which is much more than informal explanations. This difference is stressed in several reports (especially in the Polish report and in van Hiele's contribution to the Dutch report). A child can explain a rhomb as a figure having four equal and parallel sides, orthogonal diagonals, bisecting diagonals, and halving diagonals, thus summing up all the properties of the rhomb he hits upon. The feature that a rhomb can be defined by a part of these properties, is a feature of deductive, not of preparatory geometry. A child cannot grasp the sense of definitions if it has not grasped the interrelatedness of properties and the possibility to derive one property from another. Thus formulating definitions testifies a rather high level of learning geometry. According to the van Hieles the level of being able to define what "definition" means, is still higher.

It is, however, possible, even in the initiating phase, to arrive at economical definitions. Often the so-called genetic definitions, advocated by the Polish reporters will be economical. A thing will be defined by telling how it can be made. I think that this procedure is rather dangerous. A thing can be actualized by many ways, whereas in a deductive system a thing is defined in a unique way. Furthermore if children are working with ruler and compasses congruent triangles are genetically defined by the equality of three elements not of six. This misunderstanding can be avoided only by

laying strong stress on congruency of figures other than triangles.

It goes without saying that already in the initiating phase theorems will be formulated. It does not matter whether the word "theorem" is used or not. It is quite another thing with the word axiom. Many teachers and reporters refuse to use it, most of them do not even discuss the possibility to use it. A few wish to use axiom in the sense of "selfevident truth". There is little to object against this use, though it is not the modern meaning of the word, and though the child will meet with numerous selfevident propositions that are called theorems and not axioms. Using the word "axiom" will be a rather harmless verbalism.

Various reporters insist on formulating theorems not in the hypothetical, but in the assertive mode. In some Dutch methods the implication arrow is systematically used. I think this must be preferred to artificial reductions of the linguistic level.

It is generally admitted that in the preparatory course selfevident truth will be adopted without any argumentation. The equality of opposite angles, proved in many textbooks, is such a selfevident truth. One of the contributors to the Dutch report, Vredenduin, has carefully accounted for the theorems which are adopted at sight.

It is also generally agreed that no theorems must be proved until the pupils will have felt the need of proving theorems. The habit of proving theorems must be gradually developed, while the concrete basis may not be left. This point has not been treated in details in the different reports, except in the Dutch report. I cannot recapitulate the developments towards the deductive system, as sketched by the individual contributors. The most detailed exposition is to be found in Mrs. van Hiele's thesis. From her experiment and the theoretical work of both van Hieles it becomes clear that the acquisition of the logical faculties in learning geometry is a more complicated and less continuous process than it was usually thought to be. We shall come back to this point.

13. In the first paragraphs of the present report I used to speak of a moment t_0 at which the deductive phase of geometrical instruction starts. So I may expect the objection that the deductive attitude of the pupil develops so gradually that no sharp t_0 can be indicated. It is, however, a fact that such a t_0 exists in most teaching programmes. It is an urgent question whether such a discontinuity in teaching can be justified by discontinuities in the learning process. This question has been answered by several contributors to the Dutch report, especially by Vredenduin. At a certain moment we shall tell the children: Up to now we have adopted some theorems

at sight, and we have proved some other theorems. From now onwards we will define everything, and we will prove every theorem we shall pronounce.

If we transfer this statement from the teachingsphere into the learning sphere, we can say: At a certain moment the pupil should have grasped the sense, the possibility and the necessity of proving theorems. Then the pupil enters individually the phase of deductive geometry. Of course it is desirable that the t_0 of the teaching process and the t_0 of every individual learning process coincide. In progressive schools in Holland (perhaps also in other countries) systems of individual or group education supplant more and more the rigid class system. This is particularly true in mathematical instruction. In this way pupils working in the same class-room will be allowed to pass the different discontinuities of their learning process at different times.

The discontinuity t_0 is particularly important. Teachers complain that when the deductive course starts, children shy off. Then, they conclude, children are not mature. But the same phenomenon is observed when deductive geometry starts at the age of 15 instead of 12 (as testified by the Italian reporter). So it cannot be a matter of maturity, but rather a discrepancy between the teaching and the learning process. In the same sense the van Hiele's conclude that the discontinuities in the learning process are not to be interpreted as symptoms of maturing.

In order to overcome those difficulties, it is to be insisted upon that a preparatory course be really preparatory, i.e. that it prepares consciously for deductive geometry, and that the preparatory results of the introductory course are fully utilized in the deductive phase. To this point the Italian and the Yugoslavian reporters have paid special attention. Actual school systems as presented in the various reports tend to have the transition from preparatory to deductive geometry coinciding with the changing from one kind of school to another or at least from one class to the next. Perhaps more continuity in the teaching situation would be an advantage just where discontinuities in the learning process are to be surmounted.

Of course, not all initiation into geometry must be preparatory. The greater part of youth never reaches the deductive level. For them an intuitive course may be the initial and final phase of geometrical instruction. In my opinion, which is perhaps not that of the Polish and the Yugoslavian reporters, there is no need to have them attend an introductory course that prepares for deductive geometry. Acquaintance with space and practical geometry will suf-

fice. Among the reports of Western-European countries, the Netherlands report is the only one which pays regard to this type of instruction.

On the other hand, if the destination is deductive geometry, the teacher of the initiating course may never lose sight of this goal. Particularly, if during two or three years the level of instruction is too low, the transition to a higher level can involve extraordinary difficulties.

Most of the present reports are not detailed enough in order to judge whether and how the goal of deductive geometry is approached during the introductory phase. I doubt whether a mensuration course like the Canadian can be called preparatory. It would be particularly interesting to know how it is done in school systems where children who have to prepare for a higher level of geometrical instruction, are not separated from those who actually work on their final level.

In all contributions on secondary education to the Dutch report the efforts are steadily focussed on the goal of deductive geometry. The shortest way is the most popular. Obviously our teachers are anxious not to waste time with subjects that might be dispensed with. (Note that our children learn three or even five languages, and that the whole school time lasts shorter than in any other country — eleven or twelve years.) A Dutch teacher will not readily adopt a course like that of van Albada who takes his line. Mrs. van Hiele's preparatory course is rather long. It takes more than one year or even two years before the pupil reaches the deductive level. Nevertheless every step in this course is consciously and deliberately directed towards that goal. The other preparatory courses are much more straightforward. All of them show very interesting details.

14. In this final paragraph I will say a few words about the impact psychological and pedagogical research may have on geometrical instruction in the initiating phase. The role of psychology and general pedagogics is often misunderstood. It is as imperfectly understood as that of mathematics by people who do not know what mathematics are. Mathematics is an important tool. We cannot dispense with mathematics if we are building e.g. an airplane. But this does not mean that a mathematician can tell you how to build an airplane. As little can a psychologist tell you how to teach, nor a general pedagogue, how to teach mathematics. It is true that gestalt psychology has influenced lower education, and I hope it will more and more influence mathematical instruction. But this influence will be restricted to some general principles. All will

admit that Piaget's research is highly interesting. But it is quite another thing to apply his results to teaching mathematics, firstly because Piaget's mathematical background has been rather weak, but mainly because Piaget's approach hardly reflects the teaching situation of the classroom, but the rather unusual laboratory situation of the psychologist. Mathematical teaching theory can be furthered by mathematical teachers who are able mathematicians and able educators.

In the Netherlands report you can find a brief account on the theoretical work of Mr. and Mrs. van Hiele. I shall not try to summarize that summary. I will only draw your critical attention to their theory of the discontinuities in the learning process, the so-called thinking levels. These levels form a hierarchy which reminds of that of systems in logistical analysis. The relation between one level and the next higher one is analogous to that between a system and a meta-system. At every level the subject matter is a certain field that will be organized on this level. The devices of organizing on a certain level will form the field, and therefore the subject matter, on the subsequent higher level. Perception space is the field on level 0. Rhomb is a first level notion, equality of line segments and symmetry are on the second level, a logical relation like implication belongs to the third level, logical thinking itself becomes a subject matter on the fourth level. Under this aspect the van Hieles have analyzed their teaching experiences and particularly the above mentioned experiment of Mrs. van Hiele.

RECREATIE

Antwoord van nr. 8 (zie blz. 319).

De aardigheid is daarin gelegen, dat men de zijden AC en BC moet wegdenken, waarna de juistheid van de bewering een onmiddellijk gevolg er van is, dat de drie bissectrices van een driehoek door één punt gaan.

Velen zullen er, evenals indertijd de inzender (P. G. J. V.) ingevlogen zijn. En dit is zeer leerzaam, omdat we zo vaak van onze leerlingen verlangen, dat ze een geschikt onderdeel uit een figuur lichten om tot een bewijs of een berekening te komen. Men ziet, hoe moeilijk dat kan zijn.

KEUZE EN MOTIVERING VAN DE OEFENINGEN, VRAAGSTUKKEN EN TOEPASSINGEN

door

Dr. G. BOSTEELS, Berchem (België)

(Red.) Op 22 en 23 november 1958 werd te Brussel het jaarlijks congres gehouden van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars. Er waren meer dan 350 deelnemers. Een uitvoerig verslag zal verschijnen in het Belgische tijdschrift: *Mathematica & Paedagogia*.

Het algemene thema van het congres was hetzelfde als dat, wat in de titel van deze bijdrage is aangegeven. Aan Dr. G. Bosteels was opgedragen in de pleno-vergadering een oriënterende inleiding te houden. Daarna ging het congres uiteen in secties. Vóór de sluiting werden in een tweede plenaire zitting sectierapporten uitgebracht.

Dr. Bosteels hield zijn inleiding in het Frans. We zijn hem dankbaar dat hij de Nederlandse syllabus ter beschikking van de redactie van *Euclides* wilde stellen.

Er zij nog meegedeeld dat Dr. Bosteels voor het dispuutgezelschap „Thomas Jan Stieltjes” te Rotterdam een voordracht heeft gehouden die in hoofdtrekken met de Brusselse inleiding overeenstemt.

Wanneer een leraar zijn leerlingen een wiskunde-oefening voorlegt, kan zijn keuze door verschillende redenen worden bepaald. Ik zal er enkele opnoemen zonder daarbij de kwestie uit te putten.

1. Een effectieve kennis van de leerlingen, kennis waarover de leraar op een of andere manier inlichtingen verworven heeft.

2. De vermeende kennis van de leerlingen, vermoed door de leraar na één les of een reeks lessen die b.v. eenzelfde onderwerp behandelen.

3. De persoonlijke voorkeur van de leraar, voorkeur die een gevolg kan zijn van zijn eigen opleiding (b.v. meetkundige, algebraïst, analyst, enz.) of van zijn pedagogische ondervinding.

4. De afzonderlijk beschouwde leerling, of de leerling uit een vrij homogeen groepsverband.

5. De afdeling waartoe de leerling behoort.

De keuze behoeft niet noodzakelijk tot de traditionele oefeningen, toepassingen en vraagstukken beperkt te blijven, want zeer dikwijls is dit oefenmateriaal kunstmatig en gekunsteld. Zo is het b.v. niet nodig steeds de functies in de vorm $y = f(x)$ te geven; men zou ze in de vorm van een waardetabel kunnen geven, in de vorm van een grafische voorstelling met enkele of dubbele logaritmische schaal, in de vorm van een nomogram.

Maken we dikwijls geen misbruik van te ingewikkelde oefeningen ten nadele van eenvoudige, meer suggestieve oefeningen? Ik denk hierbij aan breuken in stapelvorm, ingewikkelde logaritmische vergelijkingen, moeilijke parametervergelijkingen van de tweede graad, het opstellen van vierkantsvergelijkingen waarvan de wortels vrij ingewikkelde symmetrische functies zijn.

Moeten we niet meer tijd besteden aan de studie van de exponentiële en logaritmische functies dan aan het oplossen van exponentiële en logaritmische vergelijkingen?

Verwaarlozen we niet te veel de goniometrische ongelijkheden ten voordele van verouderde problemen uit de eigenlijke driehoeksmeting?

Dit zijn enkele facetten van het probleem waarvoor ik uw welwillende aandacht zou willen vragen.

Wat de motivering van het oefenmateriaal betreft zou ik U willen voorstellen de volgende drie groepen te willen onderkennen:

- I. Wiskundige motivering (met betrekking tot de wiskunde zelf);
- II. Motivering met betrekking tot het onderwijs van de wiskunde;
- III. Praktische motivering.

I. Wiskundige motivering.

Ik zie een eerste motivering in de interne economie. Men kan b.v. de vraagstukken zo kiezen dat het aantal onbekenden dadelijk tot een minimum beperkt blijft. Bij het oplossen van stelsels vergelijkingen kan men er naar streven het aantal bewerkingen tot een minimum te herleiden. Bij het berekenen van determinanten kan men trachten het uitwerken, met behulp van de regel van Sarrus, zo lang mogelijk uit te stellen of zelfs helemaal te vermijden. Voor de lagere cyclus kan men de oefeningen in het hoofdrekenen ook door deze interne economie motiveren. Het vooraf bepalen van de grootheidsorde van een bewerking hoort hier ook thuis. Het mag U niet verwonderen dat, als een onmiddellijk gevolg van deze werkwijze, uw

leerlingen er toe komen korte en zelfs elegante werkwijzen te ontdekken.

Een tweede motivering wordt door de fundering en de structuur van de wiskunde bepaald. Denk b.v. aan de oefeningen op generalisaties bij de exponentrekening (negatieve en gebroken exponenten), aan de oefeningen die streven naar het brengen van eenheid in de onderzoekingen (b.v. oneigenlijke elementen in de meetkunde). De oefeningen die U over de complexe getallen zult geven, kunnen zo gekozen worden dat de axiomatic de plaats krijgt waar ze recht op heeft (en die tevens zou kunnen dienen als inleiding tot de algemene axiomata van de algebra).

Uw oefeningen kunnen ook zo gekozen worden dat uw leerlingen zekere isomorfismen begrijpen (ik denk hierbij aan oefeningen over rijen en logaritmen). Tenslotte kunnen uw oefeningen helpen bij het ontdekken van de wiskundige structuren.

Een derde motivering, de esthetische eigenschappen der wiskunde, zal niet nalaten u te boeien. Vanzelfsprekend moet u hierbij voorzichtig zijn: wat mooi is voor ons is het niet noodzakelijk voor de leerlingen. Het mag b.v. niet voorkomen dat elegante oplossingsmethoden bij de leerlingen de indruk verwekken dat men ze een zoveelste kunstgreep wil aanleren. Ik wil hier als voorbeeld noemen de vele problemen uit de analytische meetkunde waar een behoorlijke (maar toch steeds beredeneerde) keuze van de parameter een probleem elegant kan maken. Denk b.v. aan de parametervoorstelling van een punt van de parabool $y^2 = 2px$ in de vorm $(2pt^2, 2pt)$ die de betrekking tussen twee parameters vermijdt en ook de u bekende irrationale vorm weert. Moet ik spreken over de theorie van de bundels?

Hoeveel vraagstukken worden niet eenvoudiger als men de onbekenden x en y vervangt door de hulponbekenden $x \div y$ en xy ? Hoe elegant wordt soms een meetkundig vraagstuk als men het maar aandurft ook de goniometrie haar woord te laten meespreken! Meer dan eens gebeurt het dat de leerling elegantie ontdekt waar wij alleen kracht zien. Ik ben er zeker van dat uw leerlingen u reeds spraken over de elegantie van de differentiaal- en integraalrekening. Zij verkiezen in doorsnee allemaal een oppervlakte of een inhoud te bepalen met behulp van integraalrekening, liever dan met de methodes van de brave Euclides!

Wie elegantie zegt zegt ook spel en zo zie ik een vierde motivatie in wat ik het wiskundig spel zou durven noemen. Stel een leerling voor een constructie-oefening op te stellen waarin hij de meetkundige plaats zal kunnen gebruiken die hij zopas met u behandelde.

U zult meer dan eens verbaasd zijn over z'n vindingrijkheid.

Het wil me toeschijnen dat dit wiskundig spel in vele vragen voorkomt. Ik denk hierbij aan het opzoeken, door de leerlingen, van bijzondere standen van gegeven elementen in constructievraagstukken; ik denk aan het onderzoek over het bestaan van het omgekeerde van een stelling; ik denk aan het opzoeken van tegenvoorbeelden, aan het ontleden van definities, aan het opzoeken van overvloedige voorwaarden in definities en vraagstukken.

Dit wiskundig spel kan tevens dienen om het klassieke kader even te ontvluchten; laat ik dit door één voorbeeld toelichten. De leerling kent in de analytische meetkunde de stelling over de veranderlijke rechten die door een vast punt gaan. Ik stel hem nu de volgende vraag: wat zullen we doen als de coëfficiënten nu eens geen lineaire functies van eenzelfde parameter zijn, maar tweedegraadsfuncties? Het is een spel, maar het is leerrijk en vormend.

We beëindigen deze eerste reeks motiveringen met een historische motivering. Ik denk hierbij aan de mogelijkheden geboden door het zo actuele vraagstuk van de binaire, biquinaire en octavale getalensystemen!

Op het niveau van de zesde en vijfde klassen denk ik aan het vingerrekenen; het egyptisch rekenen, of het nu over optelling (niet positioneel stelsel) of over vermenigvuldiging gaat, kan handig gebruikt worden om op een aangename manier zaken in te leiden die anders dor schijnen te zijn (zoals het verklaren van de rekenregel voor de optelling, het vermenigvuldigen van een som met een getal).

Ook de meetkunde biedt tal van mogelijkheden; denk b.v. aan de constructies met passer en liniaal. Zou het ongepast zijn ook eens een pseudarium voor te schotelen?

Ook de algebra biedt een bonte mengeling van historische vraagstukken die de leerstof aantrekkelijker, en dus minder moeilijk maken. Vraagstukken over limieten, over irrationalen, over verschillende algoritmen, zonder daarbij de paradoxen te vergeten, kunnen onze keuze motiveren. Uw leerlingen zullen de indruk krijgen zich te ontspannen, en behendig uitgebuit brengt dit soort oefeningen en vraagstukken een aanwinst, ook in de diepte.

II. En zo kom ik tot de *motivering op onderwijsgronden*.

De eerste en meest belangrijke motivering lijkt me hier de initiatie en inleidingsmotivering. Ik denk hier aan oefeningen van de volgende soort: samenstellen van een eenvoudige vergelijking opvolgend met de wortels: a , $-a$; b , $-b$, c , $-c$ om te komen tot het begrip bikwadratische vergelijking; opstellen van een vergelijking

met wortels: $a, \frac{1}{a}; a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}$ om te komen tot de reciproke vergelijkingen.

In de meetkunde zou men, in de figuur van een driehoek met zijn vier raakcirkels, de onderlinge afstanden van de raakpunten kunnen doen berekenen om zo de leerlingen voor te bereiden op het terugvinden van lijnstukken als $s, s - a, a + b, a - b, \dots$ in analysefiguren van constructies. Wordt een hoofdstuk in de algebra of in de meetkunde op een handige manier ingeleid, dan lijdt het geen twijfel dat èn leraar èn leerling er bij winnen.

Een tweede motivering is de drill en het vastleggen. Het is zeker dat vele zaken slechts door een behoorlijke drill ingeoefend worden. Ik meen trouwens dat die drill oefeningen niet alleen in de zgn. incubatieperiode zouden moeten plaats hebben. Ook bij herhalingsoefeningen is drill gewenst. Het is volstrekt noodzakelijk dat onze studenten de toepassingsmogelijkheden van hun formules leren inzien, reeds bij de kennismaking. Voor ons mag het zeker zijn dat

$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$ en dat $\sin 3x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$; ik betwijfel

sterk dat zulks ook voor de leerling het geval is. Het lijkt me onontbeerlijk kleine (mondelinge) oefeningen in te schakelen, die duidelijk het toepassingsgebied van de formules aantonen.

Een leerling voelt zich dadelijk op zijn gemak als hij, reeds bij het begin van een nieuw hoofdstuk, de waarde van het nieuw materiaal kan begrijpen. Waarom reeds bij het begin van de ontbinding in factoren b.v. de leerling niet tonen dat hij deze werkwijzen zal dienen te gebruiken bij het herleiden op dezelfde noemer, bij het bepalen van g.g.d. en k.g.v., bij het afsplitsen van wortels. Wat een vreugde als hij constateert dat hij op die manier er in slaagt een derdemachtsvergelijking op te lossen!

Oefeningen moeten steeds zo gekozen worden dat de opklimming in moeilijkheden duidelijk merkbaar is (denk b.v. aan merkwaardige produkten; aan afgeleiden). Voor wat nu de transferten betreft moet de leerling aangespoord worden om zelf toepassingsgebieden van „zijn” wiskunde te vinden. Men kan hem spoorwijs maken door het stellen van schijnbaar onschuldige vraagjes als: waar hebt gij horen spreken over vierde evenredigen? waar hebt gij lineaire variaties ontmoet? hebt gij ergens de homografische functie leren kennen? was er afdoende reden om één der veranderlijken tot onafhankelijk veranderlijke te kiezen? hebt gij in deze toepassingen bepaalde wiskundige grootheden herkend (richtingscoëfficiënt, e.a.)? Hebt gij deze grootheden in die andere wetenschap kunnen vertolken?

De synthese is een andere motivering van het oefenmateriaal. Ik denk hierbij b.v. aan het groeperen van meetkundige eigenschappen met het doel toepassingsmogelijkheden vast te leggen. Voorbeeld: welke stellingen zijn bruikbaar om aan te tonen dat twee lijnstukken (twee hoeken) gelijk zijn; om aan te tonen dat twee rechten evenwijdig lopen, loodrecht op elkaar staan? Ook de algebra leent zich tot het opbouwen van dergelijk synthetisch materiaal.

Een interessante motivering ligt in de wens om zich rekenschap te geven van de vorderingen die de leerlingen maakten, van de degeïjkheid van de verworven automatismen. Het gaat hier b.v. om het gebruik van formules van merkwaardige produkten en merkwaardige quotiënten.

Aanwijzingen over de noodzakelijkheid van dergelijk oefenmateriaal worden de leraar gegeven door wat hij bij zijn lessen, bij zijn opvragingen en bij het verbeteren van de huistaken constateert.

Deze testen moeten, m.i., vragen behelzen die een groot stuk bestrijken (b.v. alternerend vragen over algebra, meetkunde, goniometrie en rekenkunde).

Deze tests kunnen u zeer nuttige inlichtingen verschaffen, o.m. over:

het al of niet voortbestaan van de „eeuwige” fouten (exponentrekening, vereenvoudigen van breuken, verjagen van noemers in gelijkheden, enz.);

de behendigheid in het algebraïsch denken;

het feit of de leerlingen eigenschappen kunnen aflezen uit grafieken, of eigenschappen in grafiek kunnen brengen;

hun mogelijkheden om uit zekere gegevens conclusies te trekken.

Het gaat hier dus om rendementstesten.

Ik zou deze klasse van motiveringen willen afsluiten met oefeningen die de bereikte resultaten toetsen. Het zijn oefeningen die ons dikwijls heel wat desillusies brengen. Hoe dikwijls moeten we daarbij niet constateren, dat, waar wij ons grote inspanningen getroost hebben, de resultaten het minst goed zijn. Precies deze oefeningen sporen ons aan tot introspectie en leiden ons tot beter werk.

III. We willen nu besluiten met de *praktische motivering*.

Ik zie hier vooreerst de toepassingen van de wiskunde op het gebeuren van het dagelijkse leven. Hier hoort de coördinatie met de andere vakken thuis (fysica, chemie, handelswetenschappen, enz.). Men wake er over de notaties van de collega te gebruiken en het niveau, dat hij bereikte, niet te overschrijden.

Toepassingen op het dagelijks leven zijn niet zo eenvoudig! Onze leerlingen kennen inderdaad niet zoveel van dit leven.

Elke leerling interesseert zich aan een bepaald en beperkt aantal zaken uit het dagelijks leven: onze jongens kennen b.v. de prijzen van auto's en scooters, van sportartikelen. De prijzen van brood, melk, schoenen, kostuums kennen ze echter niet! Ik heb de proef genomen en heb kunnen constateren dat 90% van de leerlingen der zesde klasse niet weten hoeveel 1 liter melk kost. Zelfs onder de oudere leerlingen kennen weinig materialen; van sociale wetten hebben ze geen flauw benul en de invloed daarvan op kostprijzen laat hen koud. Voor dergelijke oefeningen zal men dus zeer omzichtig te werk gaan bij het opstellen der opgaven.

Vanzelfsprekend zal men de voorbereiding tot examens als motivering van oefenmateriaal niet ontgaan. Laat ons hier echter niet overdrijven; in geen geval mag dit de hoofdschotel van onze motivering worden.

Onze opgaven mogen door examenvragenlijsten beïnvloed worden, voorzeker. Maar men kan er steeds voor zorgen dit materiaal zodanig te herwerken dat de algemene vorming er niet onder gaat lijden. Men kan hierbij trouwens aan de leerlingen zeggen dat een of andere vraag bij zo'n examen, door de examinerator gesteld wordt met een bepaald doel: zich rekenschap te geven van de algemene wiskundige vorming van de kandidaat.

Een laatste praktische motivering wordt bepaald door de keuze van de toekomst van de student in spe.

Onmiddellijk rijst hier een delicate vraag: is het mogelijk de vragen zodanig te individualiseren dat het gestelde doel bereikt wordt. Ik meen dat men hier bevestigend kan antwoorden: zegt een student ons dat hij wil verder studeren in de wiskunde, dan kunnen we zijn oefenmateriaal oriënteren op de kennis van de wiskundige structuren en de axiomata (oefeningen in de meetkunde, oefeningen op complexe getallen, enz.). Voor toekomstige studenten van de fakulteit van wijsbegeerte en letteren kan men vragen over wiskundige structuren opstellen, maar vooral vragen over logische structuren (algebra van Boole, Venndiagrammen, enz.).

Toekomstige economen kunnen vraagstukken van linear programming instuderen, vraagstukken over marginale kostprijzen en andere toepassingen die op lineaire functies en lineaire ongelijkheden steunen. Men kan deze lijsten aanvullen en ik meen dus dat ook deze motivering gegrond is. Het materiaal kan ook hier geïndividualiseerd worden, zonder daarbij in overdrijving te vallen.

Ontegensprekelijk zal de interesse van de leerlingen aangroeien en

bovendien zullen ze beter tot het hoger onderwijs voorbereid zijn.

Ik durf hopen, waarde Collega's, dat deze reeds te lange inleiding een basis voor uw verdere besprekingen zal kunnen zijn.

De keuze en de motivering van de oefeningen, de vraagstukken en de toepassingen hangt van een groot aantal veranderlijken af: klasse, afdeling, mentale ouderdom, sociaal milieu, toekomst en zoveel andere nog.

Ik meen dus te mogen zeggen dat het hier om een functie gaat die, voorlopig althans, empiriek is en waarvan de studie van onze moed en van onze goede wil zal afhangen.

Men zou lang kunnen praten over de definities die men zou moeten kiezen voor de begrippen „oefeningen, vraagstukken, toepassingen”.

Om het werk in uw groepen te vergemakkelijken zou ik u willen verzoeken voor de duur van deze congresdag, de volgende definities te willen aanvaarden:

- oefening: intellectueel werk, in gemeenschap ondernomen, en ook taak die aan een student opgelegd wordt om zijn geest, naar aanleiding van een bepaald punt, te vormen;
- vraagstuk: vraag die met behulp van de wiskundige vaktaal en het wiskundig apparaat moet opgelost worden;
- toepassing: vraag die een verband tussen de theorie en de feiten legt; het is dus het in praktijk brengen van de theorie.

Alleen de man die met liefde voor het kind of de jongeling voor zijn klas staat en die zich permanent aan zijn studentenmateriaal weet aan te passen, zal er in slagen oordeelkundig zijn oefenmateriaal te kiezen. Hij zal de liefde tot de wiskunde weten te kweken en dit is het hoogste genot dat een mens kan beschoren zijn.

MATHEMATISCH CENTRUM

Het Mathematisch Centrum organiseert m.i.v. september a.s. te Rotterdam een oriënterende cursus in de wiskundige statistiek, te geven door Dr. C. van Eeden. Duur ongeveer één jaar, om de 14 dagen. Cursusgeld / 10.—, syllabus inbegrepen. Aanmeldingen vóór 1 augustus 1959 bij de administratie van het M.C.

DE WANDVERSIERING VAN EEN WISKUNDELOKAAL

door

D. LEUJES

Omdat misschien meer collega's belang stellen in bovengenoemd onderwerp, laat ik hier een gedeelte van een brief volgen, die ik onlangs aan iemand hierover schreef.

Portretten van wiskundigen worden uitgegeven door de uitgever van het Amerikaanse tijdschrift *SCRIPTA MATHEMATICA*, te weten *YESHIVA UNIVERSITY*, 186th Street and Amsterdam Avenue, New York 33, N.Y. Het formaat is 10×14 inches, de prijs 50 dollarcent per stuk.

Map I bevat (ik volg de Amerikaanse spelling): Archimedes, Copernicus, Viete, Galileo, Descartes, Newton, Leibniz, Napier, Lagrange, Gauss, Lobachevsky, Sylvester. Deze map kost \$5,—, maar men kan ze ook los bestellen.

Map II bevat: Euclid, Cardan, Kepler, Euler, Fermat, Laplace, Hamilton, Cauchy, Poincare, Jacobi, Cayley, Pascal, Chebycheff.

Map III (filosofen): Pythagoras, Plato, Aristotle, Epicurus, Bacon, Descartes, Pascal, Spinoza, Leibniz, Berkeley, Kant, Pierce.

Het portret van Huygens is o.a. los te krijgen.

Er is dus keus genoeg.

Men kan de portretten bestellen via de boekhandel. Het duurt natuurlijk wel enige tijd, maar dat is begrijpelijk.

Zelf heb ik verscheidene tekeningen gemaakt op kwartovellen en ze gekleurd. Deze hang ik op in lijsten, waarvan de achterkant met klemmetjes zijn los te maken. De portretten passen daar ook in. Men kan dan af en toe verwisselen.

Tenslotte zijn ook de houtgravures van de kunstenaar M. C. Escher, die alle een wiskundige inslag hebben, bijzonder geschikt als wandversiering van een wiskundelokaal.

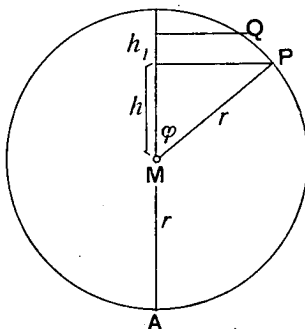
Voor meer en andere ideeën over dit onderwerp houd ik mij aanbevolen. De redactie van *Euclides* zal ze zeker willen publiceren.

BEWEGING IN EEN VERTICALE CIRKEL

door

C. W. DORNSEIFFEN

In de schoolmechanica komt herhaaldelijk het vraagstuk voor: „Als een kogeltje zich binnen een verticale cirkel zonder wrijving beweegt, waar verlaat dat kogeltje dan de wand?“, of in één van zijn andere vormen: „Waar wordt de spanning in het koord van een mathematische slinger nul?“, „Waar verlaat een kogeltje dat van een liggende cilinder afrolt, het oppervlak?“, enz. In mijn woordkeus zal ik mij verder beperken tot het geval, dat een kogeltje tussen twee concentrische cirkels beweegt; laat dan P het punt zijn waar het „van wand verwisselt“.



Dikwijls is dit vraagstuk een onderdeel van een groter vraagstuk; het is dus wenselijk dat onze leerlingen vlot dit punt bepalen. De oplossing gaat meestal als volgt (met talrijke variaties):

In P is

$$K_c = G \cos \varphi \rightarrow \frac{mv_p^2}{r} = mg \cos \varphi \rightarrow v_p^2 = gr \cos \varphi. \quad (\text{I})$$

Voorts, als v_A gegeven is:

$$v_p^2 = v_A^2 - 2gr(1 + \cos \varphi). \quad (\text{II})$$

Combinatie van I en II geeft:

$$gr \cos \varphi = v_A^2 - 2gr(1 + \cos \varphi) \rightarrow$$

$$v_A^2 = 2gr + 3gr \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{v_A^2 - 2gr}{3gr}.$$

Uit dit laatste gegeven kan dan φ of h worden berekend. In veel gevallen zal deze weg (ongeveer) gevolgd worden, waarbij dan voor r , v_A en g de betreffende waarden worden ingevuld, zodat iedermaal

een andere berekening wordt uitgevoerd; anderzijds is het laten memoriseren van vrij onoverzichtelijke formules óók niet aan te bevelen. Het nadeel van de, voor een deelvraagstuk vrij omvangrijke, algebraïsche berekening, is namelijk dat tijdens die berekening het verband met het vraagstuk zelf dreigt te verdwijnen, terwijl de kans op rekenfouten met de omvangrijkheid toeneemt.

Een andere manier, die naar mij bleek niet algemeen bekend is, en die het voordeel heeft dat het verband met het vraagstuk tijdens de oplossing sterker bewaard blijft, is als volgt:

Laat Q het punt zijn waar de snelheid van het kogeltje nul wordt. Dan is $v_p^2 = gr \cos \varphi$ (I) $= 2gh_1$, dus $h_1 = \frac{1}{2}r \cos \varphi$. Daar $h = r \cos \varphi$ is dus

$$h_1 = \frac{1}{2}h.$$

Als men deze eenvoudige betrekking weet, is het gemakkelijker eerst de hoogte van Q uit $v_A^2 = 2g(r + h + h_1)$ te berekenen; door de hoogte van Q boven M met $\frac{2}{3}$ te vermenigvuldigen vindt men de hoogte h van P boven M .

Is $v_A^2 < 2gr$ dan bestaat P niet. Is $2gr \leq v_A^2 \leq 4gr$ dan bestaan P en Q beide.

Is $4gr < v_A^2 \leq 5gr$ dan bestaat P , maar een punt Q wordt in de cirkelbeweging niet bereikt. Indien men dan onder Q verstaat een punt zó hoog, dat daar de snelheid nul „zou” worden, kan de berekening ongehinderd doorgaan.

Is $v_A^2 > 5gr$, dan bestaat P niet.

In alle gevallen dat P bestaat, kan deze methode dus toegepast worden.

BOEKBESPREKING

A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, Uitg. John Wiley, Inc., New York, 1958, 423 bl., f 50.—

Met de verschijning van dit boek is de functionaalanalyse in een stadium getreden, dat enigszins vergelijkbaar is met het stadium waarin de algebra in het begin van de dertiger jaren verkeerde. Door het in boekvorm beschikbaar komen van de voornaamste methoden en resultaten van wat men toen „moderne algebra” noemde (eerst in het boek van B. L. van der Waerden, later door een aantal andere gevolgd), werden deze methoden en resultaten in betrekkelijk korte tijd onder de wiskundigen algemeen bekend. Het gevolg is dat thans deze algebra bij elke universiteit op het normale collegerooster voorkomt, dat zij zich bovendien in ons land een plaats op het programma voor de middelbare akte wiskunde veroverd heeft, en dat althans het onderdeel „lineaire algebra” ook bij de technische hogescholen reeds binnengedrongen is. Of zich bij de functionaalanalyse een overeenkomstige ontwikkeling voor zal doen, zullen wij af moeten wachten, maar wel kan gezegd worden dat zich ten aanzien van een aantal der belangrijkste probleem-complexen nu wel langzamerhand een zekere behandelingswijze uitgekristalliseerd heeft, die

doorzichtigheid aan elegantie paart. Daarvan geeft het boek van Taylor, hoogleraar aan de Universiteit van Californië, een zeer verdienstelijk verslag.

Het is moeilijk om in het kort te vertellen wat functionaalanalyse nu precies is, maar men kan (al is dat dan wat vaag) zeggen dat het gaat om de eigenschappen van lineaire vektorruimten en lineaire transformaties van zo'n vektorruimte in een andere of in zichzelf, met toepassingen op allerlei problemen in de klassieke analyse, de integratietheorie, en de theorie der differentiaal- en integraalvergelijkingen. De vektorruimten die optreden zijn gewoonlijk niet van eindige dimensie, zodat hier een verschil met het in de lineaire algebra beschouwde geval optreedt. In ruil voor dit verlies aan eenvoud wordt dan meestal een metriek (d.w.z. een afstandsbegrip) in de ruimte aanwezig gedacht, althans een topologie. Dientengevolge treedt het continuïteitsbegrip binnen, waardoor de drempel van algebra naar analyse overschreden wordt. De optredende lineaire transformaties zijn, in overeenstemming met het aanwezig zijn van een continuïteitsbegrip, nu ook in vele gevallen continu, of zij hebben althans zekere eigenschappen met een continue transformatie gemeen. Voor zover het lineaire transformaties van zo'n ruimte in zichzelf betreft, duikt onmiddellijk (analoog aan het eindigdimensionale geval) de vraag naar eigenwaarden op, en men voelt hier al de toepassing op het probleem van een differentiaalvergelijking met randvoorwaarden aan komen. Tot de scheppers van de functionaalanalyse in haar huidige vorm moeten in de eerste plaats de Hongaar Fr. Riesz, de Oostenrijker H. Hahn, de Duitser (later Amerikaan) J. von Neumann en de wiskundigen uit de Poolse school onder leiding van S. Banach gerekend worden (alles tussen 1915 en 1939), terwijl bij de latere ontwikkeling vele nationaliteiten, maar speciaal Russen (Gelfand, Naimark e.a.), Amerikanen (Stone, Hille, Dunford e.a.) en Fransen (Bourbaki), een rol gespeeld hebben.

Het boek van Taylor bevat een algemene inleiding over de abstracte aanpak van lineaire problemen (55 bl.), daarna een uiteenzetting van de benodigde feiten uit de verzamelingstheoretische topologie (25 bl.) met toepassing op topologische lineaire vektorruimten (79 bl.). Vervolgens komt de hoofdstotel: lineaire transformaties (93 bl.) en spektraaltheorie (d.w.z. het analogon van de eigenwaardentheorie in het eindigdimensionale geval). Een speciaal hoofdstuk is dan gewijd aan spektraal theorie in ruimten van Hilbert (44 bl.). In een ruimte van Hilbert gelden bijzondere eigenschappen, omdat hier een inwendig produkt aanwezig is; zo geldt bijv. een analogon van de stelling dat de vergelijking van een kwadratisch oppervlak in de gewone driedimensionale ruimte op hoofdassengedaante gebracht kan worden. Bij alle genoemde hoofdstukken wordt van integratietheorie niet meer kennis ondersteld dan enige eenvoudige eigenschappen van de Lebesguese integraal; pas in een laatste hoofdstuk (42 bl.) wordt een algemener integraalbegrip ingevoerd, en o.a. op het verband daarvan met het begrip „lineaire functionaal” (dat in vele vorige hoofdstukken al een belangrijke rol speelde) gewezen.

De stijl van de schrijver is beknopt, doch vrijwel overal zeer helder; de technische uitvoering van het boek is fraai; er is een beknopte bibliografie, terwijl een lijst van gebruikte symbolen en een woordenregister het naslaan vergemakkelijken. Bovendien is er een aantal vraagstukken, soms met aanwijzingen voor de oplossing.

Alles bijeen hebben we hier te doen met een voortreffelijke inleiding in de functionaalanalyse, waarin de fundamenteen grondig gelegd worden, terwijl tevens aan de lezer duidelijk gemaakt wordt dat op verscheidene punten nog wel verder onderzoek te verrichten valt. Wie de energie tot serieuze bestudering van de behandelde onderwerpen op kan brengen zal dan ook, ondanks de tamelijk hoge prijs, aan dit boek niet bekocht zijn.

A. C. Zaanen

RECREATIE

7. Los op: $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 7x = 1$.

Oplossing. We herleiden de vergelijking als volgt:

$$\operatorname{tg} x \frac{\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 8x} - 1 = 0,$$

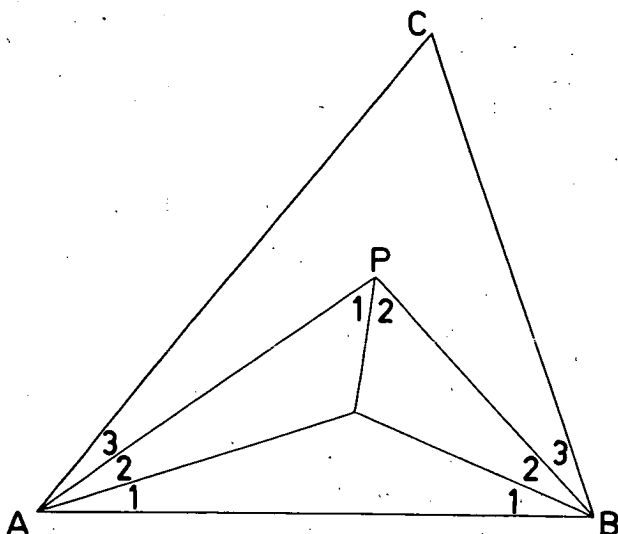
$$\frac{-\operatorname{tg}^2 x - 1}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 8x} = 0.$$

Deze vergelijking is vals. De oorspronkelijke echter helaas niet, want $\frac{1}{16}\pi$ voldoet eraan.

8. Van bijgaande figuur is gegeven:

$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$
en $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$. Bewijs, dat $\angle P_1 = \angle P_2$.

Omdat het hier niet zozeer om een puzzel gaat, want U zult deze bewering heus wel kunnen bewijzen, maar alleen om de aard van het bewijs, dat U vindt, publiceren we meteen de oplossing op blz. 306.



9. Zijn er twee driehoeken mogelijk, die niet congruent zijn en waarvan toch vijf elementen van de ene gelijk zijn aan vijf (verschillende) elementen van de andere?

OPLOSSINGEN

(Zie voor de opgave het vorige nummer).

5. Door de eerste snede wordt de kubus verdeeld in twee delen, die 9 en 18 van de uiteindelijk te verkrijgen delen bevatten. Als men enige delen tegelijk doorsnijdt, wordt hun aantal daardoor verdubbeld. Omdat $18 > 2^4$, moet men het grootste stuk nog minstens 5 keer doorsnijden. Het is dus niet mogelijk de gevraagde verdeling door middel van minder dan 6 sneden tot stand te brengen.

Het viervlak biedt meer moeilijkheden. We bepalen een punt binnen het viervlak door vier coördinaten, de vier afstanden tot de zijvlakken. Stel de hoogte van het viervlak 3. Dan is de som van deze coördinaten voor elk punt 3. Ronden we de coördinaten naar boven in eenheden af, dan vinden we de volgende mogelijkheden:

(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 2),
(1, 1, 3, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 3, 1, 1),
(2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1).

De coördinaten zijn namelijk ten gevolge van de afronding naar boven gebonden aan de beperking, dat hun som hoogstens 6 mag zijn. We krijgen dus 15 delen. Degenen, die zich hierover verbazen en de structuur van de delen nader willen nagaan, kunnen het beste eerst een regelmatig viervlak verdelen door vlakken evenwijdig aan de zijvlakken, die de ribben middendoor delen. Daarbij snijdt men bij elk hoekpunt een regelmatig viervlak af en houdt dan een regelmatig achthoek over. Bovenstaande verdeling levert 11 viervlakken en 4 achthoeken.

Kan men de verdeling ook verkrijgen door middel van minder dan 8 sneden? Bij de eerste snede zal men het viervlak verdelen in twee stukken, waarvan het ene alle delen bevat, waarvan de eerste coördinaat 1 is, en het andere de overige delen. Deze twee stukken bestaan dus uit 10 resp. 5 van de uiteindelijke delen. Door een tweede snede verdeelt men het eerste stuk in de delen, waarvan de tweede coördinaat 1 resp. groter dan 1 is, en het tweede stuk op willekeurige wijze. Het eerste stuk wordt dan in twee stukken verdeeld, die 6 resp. 4 uiteindelijke delen bevatten. Zo voortgaande ziet men gemakkelijk in, dat men met 5 sneden volstaan kan.

KALENDER

VAKANTIECURSUS 1959

Thema: „*Vectoren*”.

Dinsdag 25 augustus 1959

- 10.30 1. Opening;
2. Prof. Dr. N. H. KUIPER: „Inleidende oriëntering”;
14.00—16.00 Prof. Dr. R. TIMMAN: „Concrete behandeling van vectoren en vectorrekening met voorbeelden uit meetkunde, mechanica, physica, etc.”

Woensdag 26 augustus 1959

- 10.00—12.00 Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ: „Abstracte behandeling van vectoren met name vanuit het algebraïsch aspect”;
14.00—16.00 Prof. Dr. F. LOONSTRA: „Vectoren in het onderwijs”;
± 16.30 Sluiting.

Deelnemerskosten f 2.50, inclusief syllabus.

Aanmelding vóór 1 augustus a.s. bij de administratie van het Mathematisch Centrum onder overschrijving van f 2,50 op postrekening nr. 462890 of rekening M 2138 bij het Girokantoor van Amsterdam t.n.v. het Math. Centrum, met vermelding „vakantiecursus 1959”. Bij de aanmelding tevens te vermelden, of men geïnteresseerd is in een gezamenlijke lunch tegen matige prijs in de buurt van de vergaderzaal.

Waar de cursus in Amsterdam gehouden zal worden, zal nog aan de belangstellenden worden meegedeeld.

VERGADERING LIWENAGEL

Tijdens de algemene vergadering van het „Genootschap” houdt Liwenagel een bijeenkomst op vrijdag 28 augustus 1959 te 14.30 uur in het Eykmanhuis te Driebergen. De redactie is bij het ter perse gaan van dit nummer nog niet in het bezit van de agenda, zodat zij hiervoor verwijst naar de weekbladen.

A monumental work for the specialist as well as for the novice

In preparation

NORMED RINGS

By

M. A. NAIMARK

The Moscow State University

Translated from the First Russian
Edition

by

LEO F. BORON

The Pennsylvania State University

One of the very small
number of books devoted
to this branch of mathe-
matics which is also intend-
ed for the student!

who is making his first
serious advances in the
theory of

Banach Algebras

The reader will find a
systematic compendium of
the ideas, methods, and
results of this theory; to
facilitate comprehension,
the author has devoted a
long introductory chapter
to the basic ideas from
topology and functional
analysis which are used in
the remainder of the book.
The second chapter simi-
larly covers the algebraic
concepts used in the sequel.

**Topics of other chapters
are (a.o.):**

commutative normed rings
- the theory of symmetric
rings - of completely sym-
metric rings - topological
groups - the Murray-von
Neumann theory of opera-
tors in Hilbert space - the
decomposition of a ring of
operators into irreducible
rings, following the modern
method developed by To-
mita.

A "must" for the library of all researchers in Banach algebras!

P. NOORDHOFF Ltd. - PUBLISHERS

Groningen - The Netherlands

In voorbereiding:

Prof. G. SANSONE en

Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN

Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable

Deel I: Holomorphic functions

De theorie is zodanig weergegeven dat het boek niet slechts van nut zal zijn voor de beoefenaars der zuivere wiskunde, maar ook voor hen, die kennis willen nemen van de laatste inzichten op het punt van moderne analyse.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

ZOJUIST VERSCHENEN:

de 23e druk van

Noordhoff's logaritmentafel

in 4 decimalen

de bekende tafel voor schoolgebruik!

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar